შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 210

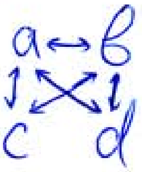
ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ამ 2012 კაციდან გამოვყოფთ ნებისმიერ 3 კაცს. ცხადია ამ 3-დან მოიძებნება ორი, რომ ერთმანეთის ნაცნობი იქნება და ეს 2 ადამიანი გავუშვათ სასტუმროს ცალკე ნომერში, მესამე კაცი კი დავაბრუნოთ დანარჩენებში. შემდეგ ისევ 3 გამოვყოთ, ანალოგიურად გავუშვათ 2 სასტუმროში და 1 უკან დავაბრუნოთ და ეს პროცესი გავაგრძელოთ მანამ, სანამ არ დაგვრჩება 4 ადამიანი დასაწყვილებელი. ვთქვათ ეს 4 ადამიანია a, b, c და d.

ცხადია რომელიმე ორი ერთმანეთის ნაცნობი იქნება (ნებისმიერი 3-იდან რომ ავიღოთ მაინც მოიძებნება 2 რომ ერთმანეთის ნაცნობებია). ზოგადობის შეუზღუდავად ეს ორი ადამიანი იყოს a და b.

თუ c ნაცნობია d-ს, მაშინ სასტუმროში გავუშვათ წყვილები (a;b) და (c;d) და პრობლემა მოიხსნება. ხოლო თუ c-ს არ ჰყავს d-ს ნაცნობად, მაშინ თუ განვიხილავთ (a;c;d) სამეულს სადაც c-ს არ ჰყავს d-ი, a-ს ჰყავს c-ი და a-ს ჰყავს d-ი. ანალოგიურად (b;c;d)-ში b-ს ჰყავს c-ი და b-ს ჰყავს d-ი.



x↔y ნიშნავს რომ x-ს ჰყავს y-ი ნაცნობი და პირიქით.

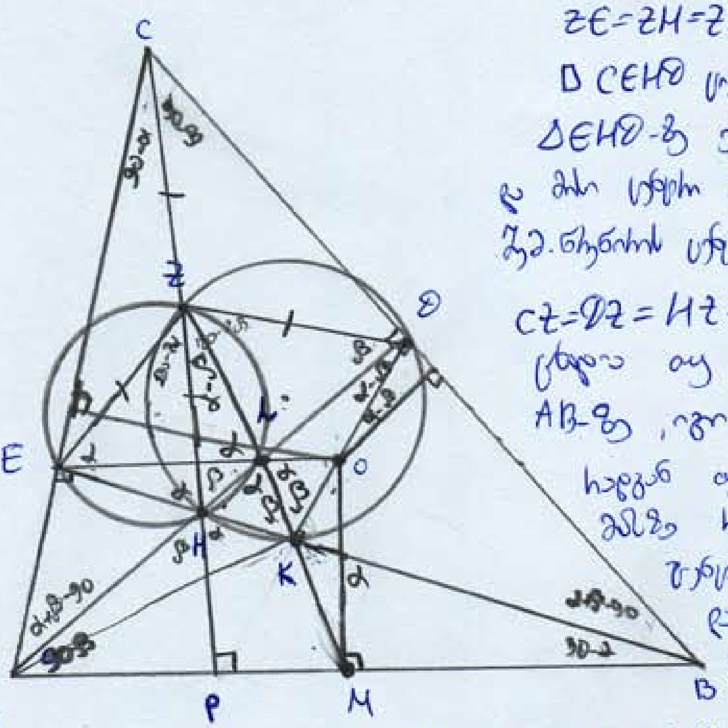
აქედან კი შეგვიძლია გამოვყოთ 2 წყვილი რომ ერთმანეთის ნაცნობებია (a;c) და (b;d) და გავუშვათ სასტუმროში. რ.დ.გ.

მაგიდა № [redacted]

28.04.2012/ მათ/ III/ 210

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$Z E=Z H=Z \Theta$

$\square C E H \Theta$ ციკლურია

$\triangle E H \Theta$-ზე ერთადერთი წრეწირი შემოიხაზება და მისი ცენტრი Z-ია $\Rightarrow$ Z არის $\square C E H \Theta$-ზე შემ. წრეწირის ცენტრი.

$C Z=\Theta Z=H Z=E Z$

ცხადია თუ CP მართობი დაშვებული C-დან AB-ზე, იგი გაივლის Z-ზე და H-ზე. რადგან თუ HC-ს შუაწერტილი Z იქნება მაშინ რადგან $\angle C E H=\angle C \Theta H=90^{\circ}$ და ცენტრი დიამეტრზე უნდა იყოს. და CH კვეთს P-ზე, რადგან სიმაღლეები 1 წერტილში იკვეთება.

O არის შუამართობების გადაკვეთა.

$\angle A=\alpha \quad \angle B=\beta$. $\quad \angle C H \Theta=\beta \quad \angle C H E=\alpha$

$\angle E C H=90-\alpha \quad \angle P C \Theta=90-\beta$

$\angle A H P=\beta \Rightarrow \angle H A P=90-\beta \quad \angle P H B=\alpha \Rightarrow \angle H B P=90-\alpha$

$\angle E A H=\alpha+\beta-90 \quad \angle \Theta B H=\alpha+\beta-90$.

$\angle \Theta K B=\angle H Z \Theta=180-2 \beta$

$\angle K \Theta B=180-\angle \Theta K B-\angle \Theta B C=180-(180-2 \beta)-\alpha-\beta+90=2 \beta-\alpha-\beta-90=$
$=\beta-\alpha+90$

$\angle Z \Theta C=90-\beta$

$\angle H \Theta K=180-\angle C \Theta Z-\angle Z \Theta H-\angle K \Theta B=\cancel{180}-\cancel{90}\cancel{+\beta}-\cancel{\beta}-\beta+\alpha-\cancel{90}=$
$=\alpha-\beta$

$\angle H Z L=\angle Z E H-\angle Z H L=\alpha-\beta=\angle H \Theta K \Rightarrow L K$ გადის Z წერტილზე.

$\angle Z K H=\angle E \Theta H=\beta \quad \angle Z K \Theta=\angle Z H \Theta=\beta$

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

თუ დავამტკიცეთ, რომ $\angle MKB = \beta \Rightarrow \angle EKL = \angle MKB \Rightarrow L, K, M$ ერთ წრფეზეა.

$$\angle HLK = \frac{\overset{\smile}{EB} + \overset{\smile}{HK}}{2} = \beta + (\alpha - \beta) = \alpha.$$

ე.ი. $\angle CBA = \angle MKB$

ΔAKB-ში KM არის მედიანა

$$\begin{cases} \dfrac{\sin \angle AKM}{\sin \angle AMK} = \dfrac{AM}{AK} \\ \dfrac{\sin \angle BKM}{\sin \angle BMK} = \dfrac{BM}{BK} \end{cases}$$

$\sin \angle AMK = \angle BMK$

$$\frac{\sin \angle AKM}{\sin \angle BKM} = \frac{BK}{AK}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № [redacted]

28.04.2012/ მათ/ III/ 210

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

უნდა დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $m\in N$-სთვის მიმდევრობის წევრებს შორის m-ის m-ზე მეტი მოიძებნება სრული კვადრატი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ უნდა დავამტკიცოთ რომ a მიმდევრობაში არის უსასრულო ბევრი სრული კვადრატი.

ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი a_i წევრის შემდეგ მოიძებნება სრული კვადრატი.

ცხადია a_i წარმოიდგინება x^2+p სახით, სადაც x^2 არის უდიდესი სრული კვადრატი რომელიც ნაკლებია ან ტოლია a_i-ზე.

$a_i=x^2+p$ $p\in[0;2x$[illegible]$]$

ა) თუ $p=0$ მაშინ $a_i=x^2 \Rightarrow a_{i+1}=x^2+x$ ანუ მივიღეთ ახალი მიმდევრობა რომლისთვისაც $p=x$, ანუ $p\neq0$. ანუ დავიყვანეთ ამ შემთხვევაზე როცა $p\neq0$ და ვაჩვენოთ, რომ მის შემდეგ მოიძებნება სრული კვადრატი.

ბ) თუ $p\neq0$ ესეც წინა აღნიშნული შემთხვევა.

$a_i=x^2+p$ $p>0$.

$a_{i+1}=x^2+x+p$ თუ $a_{i+1}=q^2$, $q\in N$. მაშინ მოიძებნა შემდეგი სრული კვადრატი, თუ არადა 1) თუ $a_{i+1}<(x+1)^2$ $|\Rightarrow x^2+x+p<x^2+2x+1$

$a_{i+2}=x^2+2x+p$ თუ $a_{i+2}=q^2$ $q\in N$ მაშინაც მოიძებნა სრული კვადრატი თუ არადა $x^2+2x+p>(x+1)^2$ $x^2+2x+p=x^2+2x+1+(p-1)$ ანუ გადავედით ახალ მიმდევრობაზე სადაც p არის 1-ით შემცირებული $\underline{a_{i+2}=(x+1)^2+(p-1)}$.

2) თუ $a_{i+1}>(x+1)^2$ $x^2+x+p>x^2+2x+1$ $a_{i+1}=x^2+2x+1+p-x-1$

$p>x+1 | \Rightarrow p-x-1>0$ ანუ გადავედით ახალ მიმდევრობაზე სადაც p შემცირდა $(x+1)$-ით.

$a_{i+1}=\underline{(x+1)^2+(p-x-1)}$.

ანუ ყოველ ჯერზე, როცა კვადრატული ნაწილი 1-ით იზრდება ხდება p-ს შემცირება, რადგან ეს უსასრულოდ ვერ შემცირდება ის გახდება

როცა p 0 ხდება ეს ნიშნავს მიმდევრობაში მოიძებნა და როცა მიაღწევს p 1-ს [illegible] სრული კვადრატი ვიპოვეთ

1-ის ტოლი. $a_t=x^2+1$. $a_{t+1}=x^2+x+1$ $a_{t+2}=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № [redacted]

28.04.2012/ მათ/ III/ 210

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ანუ დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a_i ნაბიჯის შემდეგ არის სულ ნაკლები რაც მის ლოგიკა, რომ მიმდევრობაში გვაქვს უსასრულო ბევრი სულ ნაკლები, რაც ჩვენით ეწინააღმდეგება რომ მოცემული ამოხსნის ლოგიკა. რ.დ.გ.